Solucionario Variable Compleja Serie Schaum Murray Spiegel

(14) Demuestre que:

Si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ y $\|z_1\| = \|z_2\| = \|z_3\| = 1$, los puntos z_1, z_2 y z_3 son vertices de un triángulo equilatero en la circunferencia unidad.

Solución:

Si z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero, entonces cada uno debe estar girando un ángulo de $\pi/3$ radianes respecto a otro.

Sabemos que multiplicar por un complejo, u, de módulo 1 es un giro de amplitud igual a $\arg(u)$. Definamos $u = \cos(\pi/3) + i\,\operatorname{sen}(\pi/3)$. Los tres vértices los podemos escribir como:

$$z_1 = z_1$$
$$z_2 = z_1 u$$
$$z_3 = z_1 u^2$$

$$\rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = z_1 (1 + u + u^2) = z_1 \frac{u^3 - 1}{u - 1} = 0$$

Supongamos ahora que $\|z_1\| = \|z_2\| = \|z_3\| = 1$, y que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Para probar que dichos números son vértices de un triángulo equilátero, lo que vamos a hacer es comprobar que son las raices cúbicas de un número complejo. Es decir, se trata de probar que hay un número α tal que z_1, z_2, z_3 son las raíces de la ecuación polinómica $z^3 - \alpha = 0$. Para esto es necesario y suficiente que el producto $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ puede escribirse en la forma $z^3 - \alpha$. tenemos

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - (z_1 + z_2 + z_3) z^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) z - z_1 z_2 z_3 = 0$$
$$= z^3 - (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) z - z_1 z_2 z_3$$

Poniendo $\alpha = z_1 z_2 z_3$, lo que hay que probar es que $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_3 z_3 = 0$. todavía no hemos usado la hipótesis de que $\|z_1\| = \|z_2\| = \|z_3\| = 1$. Vamos a usarla ahora para intentar sacar factor común en la suma $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 0$ la expresión $z_1 + z_2 + z_3$. tenemos que:

$$(1) z_1 z_2 + (1) z_1 z_3 + (1) z_2 z_3 = \bar{z}_3 z_3 z_1 z_2 + \bar{z}_2 z_2 z_1 z_3 + \bar{z}_1 z_1 z_2 z_3$$
$$= (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + z_3)\, z_1 z_2 z_3 = 0$$

$\therefore$ z_1, z_2, z_3 son Vertices de un triángulo equilatero.

Solucionario Variable Compleja Serie Schaum Murray Spiegel

624b518f5d